

文文章编号: 1000-7598 (2011)增刊 1-0015-05

岩土材料的各向异性强度准则

高智伟¹, 赵吉东¹, 姚仰平²

(1. 香港科技大学 土木与环境工程系, 香港 九龙; 2. 北京航空航天大学 土木工程系, 北京 100191)

摘 要: 岩土材料的强度往往表现出很强的各向异性, 而已有的各向同性强度准则不能够描述这一特性。提出一个岩土材料的各向异性强度准则。为了描述材料的各向异性, 引入了一个由应力张量和组构张量的联合不变量表达的各向异性参数。该参数可以描述加载方向和材料组构方向的夹角。强度准则是基于材料在子午面和偏平面上的破坏特性而建立的, 这为描述广义的材料强度各向异性提供了方便。与原各向同性强度准则相比, 各向异性强度准则只引入了两个新的模型参数, 而且所有的模型参数都可以通过常规的室内试验结果确定。该准则的预测结果与砂土、黏土、天然黏土和岩石的试验结果比较表明, 它能够很好地描述岩土材料强度的各向异性。

关 键 词: 各向异性; 岩土材料; 强度准则; 真三轴试验

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

An anisotropic failure criterion for geomaterials

GAO Zhi-wei¹, ZHAO Ji-dong¹, YAO Yang-ping²

(1. Department of Civil and Environmental Engineering, The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China;

2. Department of Civil Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: The strength of geomaterials is strongly influenced by their fabric anisotropy, which can not be characterized by the isotropic failure criterion reasonably. A general anisotropic failure criterion is proposed. To characterize relative orientation between the loading direction and material fabric, an anisotropic variable expressed by the joint invariants of the stress tensor and fabric tensor is introduced. The failure criterion is developed based on the failure characteristics of geomaterials in both the meridian plane and deviatoric plane, which leads to a general three-dimensional description of strength anisotropy. Compared with the isotropic failure criterion, only two new parameters are introduced in the anisotropic one. All the model parameters can be readily calibrated based on the conventional laboratory tests. Comparison between the model predictions with the test results on sand, clay, natural clay as well as rock demonstrates that the new criterion can characterize the strength anisotropy of geomaterials in a reasonable manner.

Key words: anisotropy; geomaterials; failure criterion; true triaxial tests

1 引 言

大量的试验和研究表明, 由于沉积、压实和组成颗粒的不规则性, 岩土材料往往表现出一定程度的各向异性。这种各向异性一般又表现为正交各向异性——在沉积面上材料特性接近于各向同性, 而沉积方向与沉积面上的材料特性存在很大差异^[1-2]。岩土材料的各向异性对其破坏特性有显著影响。例如, 在研究模型条形基础的承载力时, Oda 等^[3]发现, 在加载方向和沉积面垂直时得到的最大承载力

和在加载方向与沉积面平行时得到的最小承载力差别可以达到 34%。对于黏土, 强度的各向异性同样很明显。Yong 和 Silvestri^[4]研究发现, 灵敏土的无侧限抗压强度随着主应力方向的变化而连续变化, 所测得的最小值是最大值的 60%~75%。Nishimura 等^[5]用空心扭剪试验研究了天然伦敦黏土强度的各向异性。结果表明, 在 Bishop 参数 $b = 0.5$ 的条件下, 最大应力比 q/p 比最小应力比高 40% (其中 p 为有效平均主应力, q 为剪应力)。一般情况下, 岩石材料强度的各向异性程度往往更大。因此, 对岩土材

收稿日期: 2010-12-14

基金项目: 香港研究资助局优配研究金项目 (No. 623609)。

第一作者简介: 高智伟, 男, 1983 年生, 博士研究生, 主要从事岩土材料本构模型方面的研究。E-mail: gzwce@ust.hk

通讯作者: 赵吉东, 男, 1975 年生, 助理教授, 博士生导师, 主要从事岩土材料的本构特性研究。E-mail: jzhao@ust.hk

料强度各向异性的合理描述具有重要的工程意义。实际上, Zdravković 等^[6]通过有限元模拟结果表明, 考虑软黏土材料强度的各向异性可以更好地预测现场试验地基的极限破坏高度。

大部分被广泛接受的岩土破坏准则是基于各向同性的假设的, 它们并不能很好地描述各向异性对材料破坏的影响。例如, Callisto 和 Calabresi^[7]发现 Mohr-Coulomb 和 Lade 强度准则都不能够合理描述天然 Pisa 黏土在三轴试验下的破坏特性。因此, 一些学者提出了可以考虑材料正交各向异性的破坏准。在 Lade 强度准则^[8]的基础上, 通过将在偏平面上的破坏面绕圆心旋转, Ablev 和 Lade^[9]提出了一个各向异性强度准则。但是, 这个强度准则只适合于描述岩土材料在真三轴试验条件下的破坏特性, 并不适用于其他更一般的情况, 如当应力轴主轴发生旋转而导致应力张量和组构张量非共轴时。在 Pietruszczak 和 Mroz^[10]的研究的基础上, Lade^[11]推导了一个基于 Lade 强度准则的各向异性强度准则。Mortara^[12]也提出了一个适合于岩土材料的各向异性强度准则, 在不考虑各向异性的情况下, 该强度准则可以恢复到 SMP^[13]和 Lade 强度准则。值得注意的是, 其中还有很多各向异性强度准则是专门针对岩石提出来的^[14], 这里不作详细综述。

本文将建立一个广义的各向异性强度准则。为了描述加载方向对材料破坏的影响, 将引入一个用应力张量和组构张量的联合不变量表述的各向异性参数 A 。在试验结果的基础上, 假设描述材料摩擦特性的参数随 A 连续变化。在常规三轴压缩条件下, 该强度准则与基准的各向同性强度准则相同。由于该准则是基于材料在子午面和偏平面的破坏特性建立的, 这为全面描述材料强度的各向异性提供了方便。准则预测结果与试验结果比较表明, 该强度准则可以合理描述砂土、黏土、天然黏土和岩石的强度各向异性。

2 各向异性强度准则

试验结果表明, 岩土材料强度的各向异性主要表现在摩擦特性的各向异性, 因此, 在广义非线性强度准则^[15]的基础上, 提出如下各向异性强度准则:

$$\alpha\sqrt{\bar{I}_1^2 - 3\bar{I}_2} + \frac{2(1-\alpha)\bar{I}_1}{3\sqrt{(\bar{I}_1\bar{I}_2 - \bar{I}_3)/(\bar{I}_1\bar{I}_2 - 9\bar{I}_3)} - 1} = \frac{1}{3}M_f f(A)\bar{I}_1 \quad (1)$$

式中: α 为模型参数; M_f 为描述材料摩擦特性的参数^[15]; $\bar{I}_1 = (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)$, $\bar{I}_2 = (\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3)$,

$\bar{I}_3 = (\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3)$, 为变换应力 $\bar{\sigma}_{ij}$ 的不变量^[15]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \left[p_r \left(\frac{p + \sigma_0}{p_r} \right)^n - p \right] \delta_{ij} \quad (2)$$

式中: p_r 为参考应力; n 为模型参数; δ_{ij} 为 Kronecker 符号。由于篇幅所限, 这里将不对广义非线性强度准则作详细介绍。在公式 (1) 中, $f(A)$ 为描述材料强度各向异性的函数:

$$f(A) = \exp\left\{d\left[(A+1)^2 + \beta(A+1)\right]\right\} \quad (3)$$

式中: d 和 β 为新引入的两个模型参数; A 为描述加载方向和材料组构夹角的各向异性参数, 且有:

$$A = \frac{s_{ij}d_{ij}}{\sqrt{s_{mn}s_{mn}}\sqrt{d_{pq}d_{pq}}} \quad (4)$$

式中: $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$, $d_{ij} = F_{ij} - F_{kk}\delta_{ij}/3$, 分别代表偏应力张量和偏组构张量。对于 δ_{ij} , 当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$; 否则, $\delta_{ij} = 0$ 。注意到, Dafalias 等^[16]也用同样的参数来模拟砂土变形特性的各向异性。由于岩土材料一般为正交各向异性, 假设材料组构的主方向为 x_1 、 x_2 和 x_3 , 则 F_{ij} 可以表达为^[17]

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3+\Delta} \begin{bmatrix} 1-\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1+\Delta \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: Δ 为描述材料各向异性程度的参数。 x_2-x_3 面为各向同性面, 一般对应于岩土材料的沉积面。当材料为各向同性时, $\Delta = 0$; 当材料各向异性程度最大时, $\Delta = 1$ 。通常情况下 $0 < \Delta < 1$, 而且其大小不影响 A 的值。因此, 材料强度的各向异性程度大小是由 d 来描述的, 而 A 只可以描述应力方向和材料组构方向在三维空间的相对位置。在常规三轴压缩试验条件下, $A = -1$; 在常规三轴伸长试验条件下, $A = 1$ 。在中主应力参数 b 一定的条件下, A 随最大主应力方向与沉积方向之间的夹角的增加而增加。关于 A 在典型室内试验条件下的变化规律, 请参见参考文献[18]。在偏平面上, 当 $f(A) > 1$ 时, 各向异性强度准则破坏面相对于各向同性强度准则 (广义非线性强度准则) 破坏面外扩; 当 $f(A) < 1$ 时, 趋势相反。而在常规三轴压缩情况下, $A \equiv 1$, $f(A) \equiv 1$, 各向异性强度准则与广义非线性强度准则永远相同, 这可以简化模型参数的确定。图 1 为各向异性强度准则在真三轴试验条件下的破坏面形状。

3 各向异性强度准则的验证

为了验证所提出的各向异性强度准则的合理

性，将用砂土、黏土、天然黏土和岩石的试验数据与强度准则预测作比较。具体的模型参数确定方法请参见参考文献[18]。为了便于分析各向异性强度准则与各向同性强度准则的差别，两个强度准则预测结果都列在比较之中。

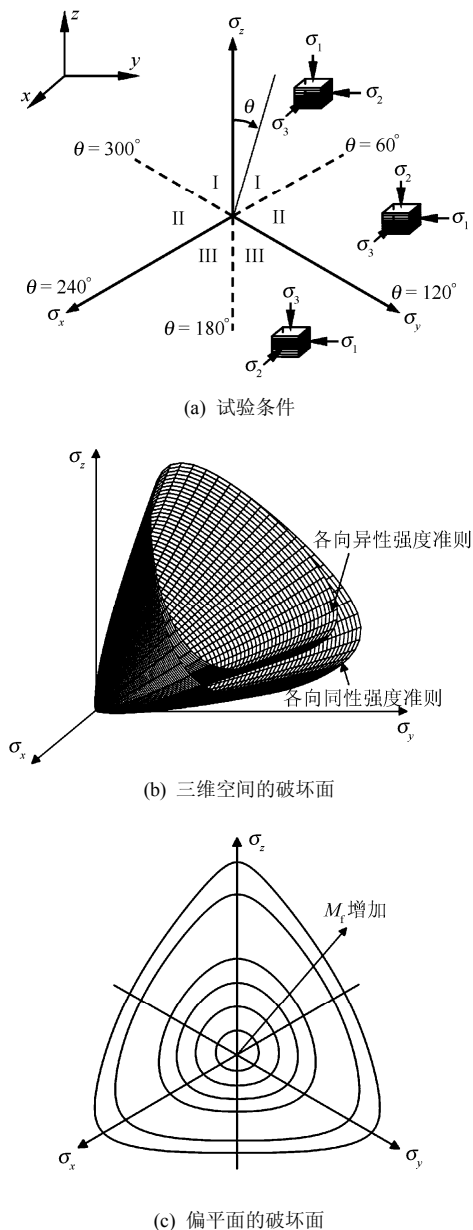


图 1 各向异性强度准则在真三轴试验条件下的破坏面形状示意
Fig.1 Illustration of the failure locus in the three-dimensional space and deviatoric plane under the typical true triaxial test condition

3.1 砂土

Abelev 和 Lade^[9]用密实的 Santa Monica 海砂做了一组真三轴试验，所有试验中保持 $\sigma_3 = 50 \text{ kPa}$ 和 Bishop 参数 b 不变。图 2 为两个强度准则的预测结果和试验数据的比较。两个强度准则的参数 α 相同。在偏平面上，两个准则的差别并不明显，但是

在 $\varphi - b$ 空间内（其中 φ 为内摩擦角），各向同性强度准则只给出一个 $\varphi - b$ 关系，这与试验结果差别很大。在偏平面上的 3 个分区内（参照图 1(a)），当 $0.2 < b < 0.8$ 时，各向异性强度准则高估了试验结果，这是因为破坏前有剪切带出现，所测得的结果不代表一个连续体单元的强度特性。因此，各向异性强度准则破坏面可以认为是材料在变形均匀时的目标破坏面。

3.2 黏土

图 3 为 San Francisco Bay Mud 的真三轴试验结果与两个强度准则预测的比较^[19-20]。比较可以看出，各向异性强度准则可以很好地描述偏平面上的试验结果，只在 Sector II 部分略有高估。而各向同性强度准则明显高估了 Sector III 的试验结果。对于 $\varphi - b$ 关系，各向同性强度准则在 3 个分区内只给出惟一的 $\varphi - b$ 关系，与试验结果差别较大。而各向异性强度准则可以很好地预测 Sector I 和 Sector II 的试验结果，只是在 Sector III 高估了试验所测得的内摩擦角，最大差别为 4° ，约 10%。从偏平面上的试验结果可以看出（图 2(a)），该组试验结果具有较大

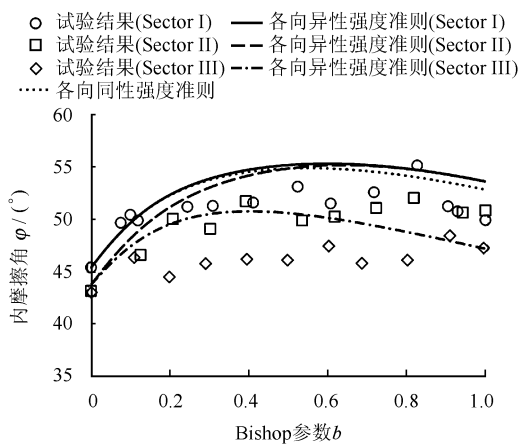
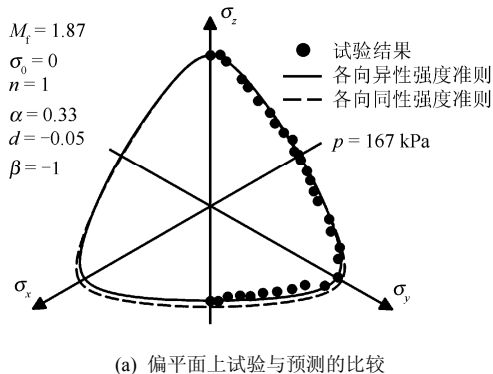


图 2 密实 Santa Monica 海砂真三轴试验结果与强度准则预测的比较
Fig.2 Comparison between the true triaxial test results on dense Santa Monica Beach sand and the criterion predictions

的离散性，这一差别可能是由于试验误差引起的。

3.3 天然黏土

Callisto 和 Calabresi^[7]用 Pisa 黏土做了一组真三轴试验。在取样完成之后，所有试样都被重新固结到原始应力状态，然后保持平均有效应力 $p = 88.2 \text{ kPa}$ 不变，剪切到破坏。图 4 为试验结果和两个强度准则预测的比较。由于没有足够的试验数据来确定土在子午面上的破坏参数，只有 M_f 是根据 $\theta = 0$ 的试验结果确定的，同时假定 $\sigma_0 = 0$ 、 $n = 1$ 。此时不需要指定 p_r 。从比较可以看出，与各向同性强度准则可以很好地描述材料在偏平面的破坏特性，而各向同性准则显著高估了土在 Sector III 的强度值。

3.4 岩石

岩石强度的各向异性一般是通过常规三轴试验来研究的，在试验过程中，最大主应力方向与沉积面方向的方向 ξ 从 $0^\circ \sim 90^\circ$ 变化。图 5 为 Touremire shale 的三轴试验结果与两个强度准则预测的比较^[21]。在子午面上，各向同性强度准则的预测结果与各向异性强度准则在 $\xi = 0^\circ$ 时的预测结果相

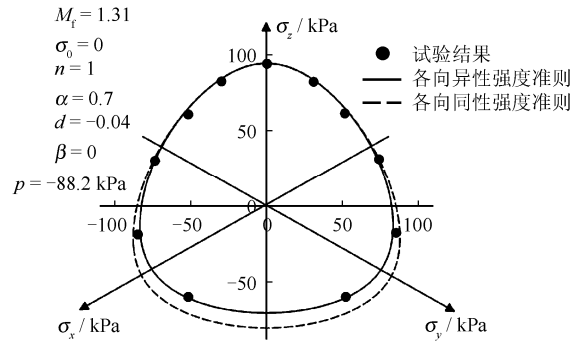
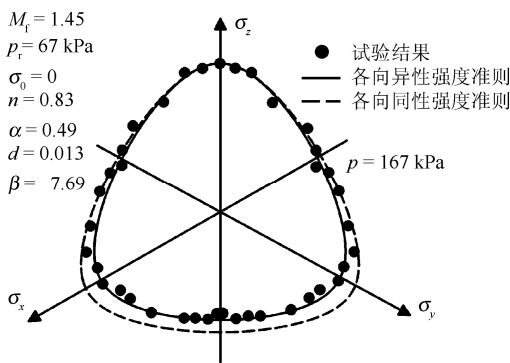
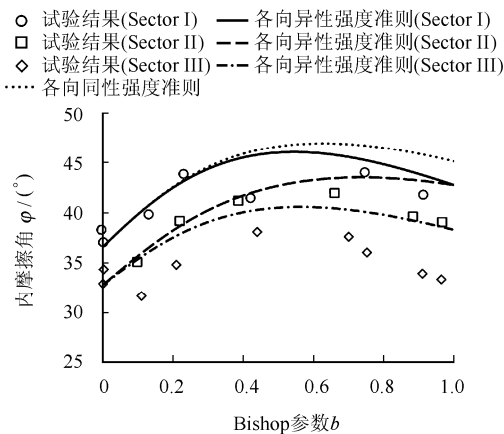


图 4 各向异性和各向同性强度准则对 Pisa 黏土在真三轴试验条件下强度特性的描述

Fig.4 Characterization of the failure of Pisa clay in true triaxial tests by the anisotropic and isotropic failure criteria



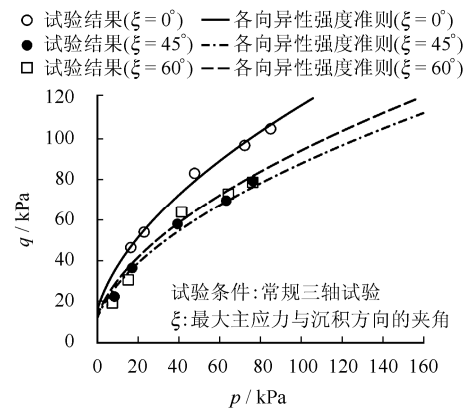
(a) 偏平面上试验与预测的比较



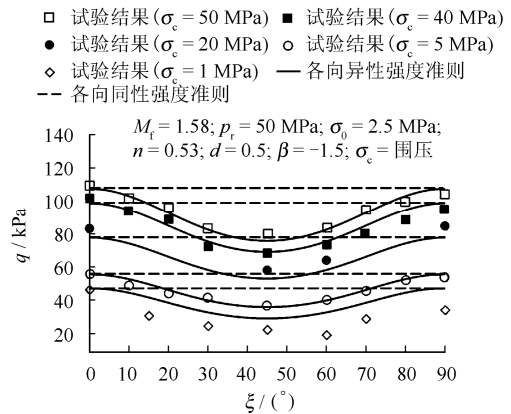
(b) 内摩擦角 φ 与 Bishop 参数 b 的关系

图 3 San Francisco Bay mud 真三轴试验结果与强度准则预测的比较

Fig.3 Comparison between the true triaxial test results on San Francisco Bay mud and the criterion predictions



(a) 子午面上的强度特性



(b) 强度随加载方向的变化

图 5 三轴压缩试验条件下 Touremire shale 强度随加载方向的变化以及两个强度准则的预测

Fig.5 The strength variation of Touremire shale with loading direction in conventional triaxial compression tests and the criterion predictions

同。从不同围压条件下 $\xi - q$ 关系可以看出，各向同性强度准则的预测值在 $\xi \neq 0^\circ$ 和 $\xi \neq 90^\circ$ 时高于实测值。同时我们注意到，在围压为 $\sigma_c = 1 \text{ MPa}$ ，各向异性强度准则预测值高于实测值较多，这是因为其中的各向异性参数 A 只是应力方向和组构方向夹角

的函数, 与平均有效应力无关。而试验结果表明, 岩石强度的各向异性程度是和平均有效应力相关的。当平均有效应力增加时, 岩石强度的各向异性程度降低。为了得到更好的预测结果, 可以把 A 扩展为与 p 相关的函数。

4 结 语

本文提出了一个岩土材料各向异性强度准则。为描述加载方向和材料组构方向的夹角, 引入了一个由应力张量和组构张量的联合不变量表达的各向异性参数 A 。在广义非线性强度准则的基础上, 将描述材料摩擦特性的参数 M_f 扩展为 A 的函数。当加载方向变化时, M_f 随 A 连续变化。该强度准则是基于材料在子午面和偏平上的破坏特性建立的, 这为全面材料强度各向异性提供了方便。在常规三轴试验条件下, 各向异性强度准则与各向同性强度准则相同。与各向同性强度准则相比, 新的强度准则只另外引入了两个模型参数, 而且所有的模型参数都可以根据常规室内试验结果来确定。强度准则的预测与砂土、黏土、天然黏土和岩石的试验结果比较表明, 各向异性强度准则可以合理描述各种岩土材料的强度各向异性。

参 考 文 献

- [1] CASAGRANDE A, CARILLO N. Shear failure of anisotropic materials[J]. **Boston Society of Civil Engineers**, 1944, 31(4): 74—87.
- [2] ARTHUR J R F, MENZIES B K. Inherent anisotropy in a sand[J]. **Géotechnique**, 1972, 22(1): 115—128.
- [3] ODA M, KOISHIKAWA I, HIGUCHI T. Experimental study of anisotropic shear strength of sand by plane strain test[J]. **Soils and Foundations**, 1978, 18(1): 25—38.
- [4] YONG R N, SILVESTRI V. Anisotropic behaviour of a sensitive clay[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1979, 16: 335—350.
- [5] NISHIMURA S, MINH N A, JARDINE, R J. Shear strength anisotropy of natural London clay[J]. **Géotechnique**, 2007, 57(1): 49—62.
- [6] ZDRAVKOVIĆ L, POTTS D M, HIGHT D W. The effect of strength anisotropy on the behaviour of embankments on soft ground[J]. **Géotechnique**, 2002, 52(6): 447—457.
- [7] CALLISTO L, CALABRESI G. Mechanical behaviour of a natural soft clay[J]. **Géotechnique**, 1998, 48(4): 495—513.
- [8] LADE P V. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1977, 13(11): 1019—1035.
- [9] ABELEV A, LADE P V. Characterization of failure in cross-anisotropic soils[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2004, 130(5): 599—606.
- [10] PIETRUSZCZAK S, MROZ Z. On failure criteria for anisotropic cohesive-frictional materials[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2001, 25(5): 509—524.
- [11] LADE P V. Modeling failure in cross-anisotropic frictional materials[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2007, 44(16): 5146—5162.
- [12] MORTARA G. A yield criterion for isotropic and cross-anisotropic cohesive-frictional materials[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2010, 34: 953—977.
- [13] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under different principal stresses[J]. **Proceedings of the Japanese Society of Civil Engineers**, 1974, 232: 59—70.
- [14] DUVEAU G, SHAO J F, Henry J P. Assessment of some failure criteria for strongly anisotropic geomaterials[J]. **Mechanics of Cohesive-Frictional Materials**, 1998, (3): 1—26.
- [15] YAO Y P, LU, D C, ZHOU A N, et al. Generalized non-linear strength theory and transformed stress space[J]. **Science in China (Series E): Technological Sciences**, 2004, 47(6): 691—709.
- [16] DAFALIAS Y F, PAPADIMITRIOU A G, LI X S. Sand plasticity model accounting for inherent fabric anisotropy[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2004, 130 (11): 1319—1333.
- [17] ODA M, NAKAYAMA H. Yield function for soil with anisotropic fabric[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1989, 115(1): 89—104.
- [18] GAO Z W, ZHAO J D, YAO Y P. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2010, 47(22—23): 3166—3185.
- [19] KIRKGARD M M, LADE P V. Anisotropy of normally consolidated San Francisco Bay Mud[J]. **Geotechnical Testing Journal**, 1991, 14(3): 231—246.
- [20] KIRKGARD M M, LADE P V. Anisotropic three-dimensional behavior of a normally consolidated clay[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1993, 30(4): 848—858.
- [21] NIANDOU H, SHAO J F, HENRY J P, et al. Laboratory investigation of the behaviour of Tournemire shale[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 1997, 34(1): 3—16.