

岩石混凝土类材料损伤局部化分叉研究及应用

A damage localization bifurcation model for rock-concrete-like materials and its application

赵吉东, 周维垣, 黄岩松, 杨若琼
(清华大学水利系, 北京 100084)

摘要:针对岩石混凝土类材料,提出了损伤局部化分叉模型。根据材料发生损伤局部化分叉的充要条件,对平面应变和平面应力情况下单轴拉伸、纯剪以及单轴压缩情况下的局部化结果进行了分叉分析,并通过数值模拟分析比较,说明文中模型是可行的,且已应用于拱坝坝踵开裂分析中。

关键词:损伤局部化;分叉分析;数值模拟

中图分类号:TU 452 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-4548(2003)01-0080-04

作者简介:赵吉东(1975-),男,1997年清华大学水利系本科毕业,2002年7月清华大学水利系获博士学位,主要从事水工结构、岩石力学及数值模拟方面的研究。

ZHAO Ji-dong, ZHOU Wei-yuan, HUANG Yan-song, YANG Ruo-qiong

(Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The paper presents a damage localization bifurcation model for rock-concrete-like materials. The necessary and sufficient conditions for the occurrence of damage localization were discussed and the critical hardening modulus and localization orientation were presented. Several simple cases were discussed and the results were verified by numerical simulations of FEM. The model is applied to the cracking simulation of the heel of an arch dam during the course of impounding.

Key words: damage localization; bifurcation analysis; numerical simulation

0 引言

岩石混凝土类非均质材料,由于其内部具有大量随机分布的宏观缺陷,在外荷载的作用下,新的微缺陷和空洞不断生成并与其它缺陷汇合、连通成为宏观裂纹,并最终由宏观裂纹分布演化为条带状的局部化破坏^[1-3]。这种破坏方式在岩土工程中非常常见,因此得到了普遍重视和长期研究^[4-6]。研究表明,在试验条件下,岩石类脆性材料极易发生张拉性脆断局部化破坏,这对应于细观微裂纹的开裂、折转和汇合。但工程岩体大多是在压剪受力状态,内部裂纹面多处于压剪状态,在荷载作用下,微裂纹主要沿裂纹面发生剪切摩擦,卸载后界面处性状恶化导致裂缝不能完全闭合而发生非弹性变形,其累积的结果使得材料残余强度出现折减,宏观上即表现为材料的损伤劣化和运动硬化性质的增加,并最终导致损伤局部化。在局部化剪切带出现时,材料所表现出的高度非线性主要是剪切带内的损伤微孔洞汇合连通引起的,而剪切带外主要发生弹性卸载作用。鉴于岩石类脆性材料有着以上变形破坏的特点,宏细观结合的研究方法就成为本世纪80年代以来断裂力学和损伤力学进行这类材料本构特性描述的主要方法。其中连续损伤力学在描述岩石混凝土类材料的损伤局部化特性方面更有着特殊的优越性。许多学者都曾针对这类材料发展了基于损伤

的弹性劣化模型(Elastic Degradation Model),用来方便地描述脆性材料弹性性质折减的本构特性,并对局部化损伤作了初步的研究^[7-14]。但当前针对损伤材料发生局部化分叉的条件研究还非常少,且不深入。

本文基于岩石混凝土类材料弹塑性损伤模型,建立材料率相关损伤局部化分叉模型,根据材料发生不连续局部化分叉的充要条件、临界硬化模量和特征方向,对单轴拉伸、纯剪和单轴压缩情况下的解进行了具体分析,通过有限元数值模拟进行对比分析和验证。最后将结果应用于某拱坝坝踵开裂的局部化模拟预测中。

1 损伤本构关系

设岩石类混凝土类材料损伤本构关系为

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}, \dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{ed} \dot{\epsilon}_{kl}, \quad (1)$$

$$D_{ijkl} = (1-d) D_{ijkl}^0, \dot{D}_{ijkl} = -\dot{d} D_{ijkl}^0, \quad (2)$$

$$D_{ijkl}^{ed} = D_{ijkl} - \frac{1}{A} D_{ijkl} M_{abcd} \sigma_{cd} f_{xy} D_{xykl}, \quad (3)$$

$$\dot{D}_{ijkl} = -D_{ijkl} \dot{C}_{pprs} D_{rskl}, \dot{C}_{ijkl} = \dot{\lambda} M_{ijkl}, \quad (4)$$

$$f_{ij} = \partial F / \partial \sigma_{ij}, \dot{\lambda} = \frac{1}{A} f_{ij} D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl},$$

$$A = H + f_{pq} D_{pqrs} M_{rsuv} \sigma_{uv} > 0. \quad (5)$$

基金项目:国家自然科学基金资助项目(59919390); Schlumberger BGC 资助项目

收稿日期:2002-04-02

式中 D_{ijk}^0 为材料弹性损伤切线模量; H 为硬化模量, $H = -\partial F/\partial \lambda$; D_{ijk} 为材料的弹性损伤割线模量, 这是其与经典弹塑性理论不同之处, 后者该处为常量的初始弹性张量; d 为材料标量损伤变量, 如在应力空间, 可设 $\hat{d} = 1/(1-d)$; C_{ijk} 为材料柔度张量, 它和材料弹性劣化模量之间的关系为 $C:D = I_4$, I_4 为四阶单位张量; F 为应力空间的损伤加卸载函数; λ 为类似于塑性乘子的非线性乘子; M_{ijk} 为柔度变化率张量; $g_{ij} = \partial G/\partial \sigma_{ij} = M_{ijk}\sigma_{ik}$, G 为损伤势函数。

损伤加卸载准则服从 Kuhn-Tucker 条件:

$$\dot{F} \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{F}\dot{\lambda} = 0. \quad (6)$$

如取非线性乘子 λ 和 M_{ijk} 为

$$\lambda = \hat{d} = -\dot{d}/(1-d)^2, M_{ijk} = C_{ijk}^0, \quad (7)$$

选择一般形式的损伤加卸载函数^[11]:

$$F = f[w^0, \hat{d}] - r[\hat{d}], w^0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijk}^0 \sigma_{ik}, \quad (8)$$

则硬化模量一般表达式为

$$H = -\left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{\sigma} = -\frac{\partial f[w^0, \hat{d}]}{\partial \hat{d}} + \frac{\partial r[\hat{d}]}{\partial \hat{d}}. \quad (9)$$

弹性损伤切线模量有如下形式:

$$D_{ijk}^d = (1-d)D_{ijk}^0 - \frac{(1-d)^2(\partial f/\partial w^0)}{\frac{\partial r[\hat{d}]}{\partial \hat{d}} - \frac{\partial f[w^0, \hat{d}]}{\partial \hat{d}} + 2(1-d)w^0 \frac{\partial f[w^0, \hat{d}]}{\partial w^0}} \sigma_{ij} \sigma_{ik}. \quad (10)$$

2 损伤局部化分叉模型

不连续分叉理论认为^[3], 材料中不连续分叉决定于局部化张量 Q_{ij} , 有

$$Q_{ij} = n_j D_{ijk}^d n_k, \quad (11)$$

其中 n_k ($k=1, 2, 3$) 为局部化带特征面法向量。材料中出现不连续局部化分叉的充要条件为

$$\det[Q_{ij}] = 0. \quad (12)$$

对上式进行特征值谱分析, 可得发生局部化的条件为使硬化模量 H 出现最大值的方向, 即

$$H^l = \max H(n_i), n_k n_k = 1,$$

$$H = -f_{ij} D_{ijk}^d g_{ik} + n_j D_{ijk}^d g_{ik} P_{ijmn} D_{mnl} n_k. \quad (13)$$

其中 P_{ij} 为 Q_{ij} 对称正定的逆, $P_{ij} = [n_j D_{ijk}^d n_k]^{-1}$ 。设 $D_{ijk}^0 = D_{ijk}^c$, G, ν 为剪切模量和泊松比, 则

$$Q_{ij} = (1-d)G \left(\frac{1}{1-2\nu} n_i n_j + \delta_{ij} \right),$$

$$P_{ij} = \frac{1}{(1-d)G} \left(-\frac{1}{2(1-\nu)} n_i n_j + \delta_{ij} \right). \quad (14)$$

由式(13)得发生局部化时的硬化模量为

$$\frac{H}{2(1-d)G} = 2n_k f_{ik} g_{ij} n_j + \frac{\nu}{1-\nu} [n_i (g_{ik} f_{ij} + f_{ik} g_{ij}) n_j - f_{ij} g_{ij}] - f_{ij} g_{ij} - \frac{1}{1-\nu} n_i f_{ij} n_j n_k g_{ik} n_k. \quad (15)$$

按照本文假设, f_{ij} 和 g_{ij} 张量之间仅为常量系数的差别, 主方向完全一致, 因此为完全关联流动的。为简化和使用方便, 规定表 1 所示符号约定。由该符号约定, 方程式(15)可写成

$$\frac{H}{2(1-d)\zeta G} = \sum_{m=1}^3 (\bar{f}_m^2 + \bar{r}_m^2) n_m^2 - \Psi \left(\sum_{i=1}^3 \bar{f}_i n_i^2 \right)^2 - k. \quad (16)$$

使用 Lagrange 乘子最大化法, 可得发生局部化时最大硬化模量为

$$H^{lb} = G\zeta(1-d) [\psi(\bar{f}_1 + \bar{f}_3 + r)^2 - \bar{f}_1 \bar{f}_3 - k]. \quad (17)$$

如果 $r \geq 0$ 且 $\bar{f}_1 > \bar{f}_2 > \bar{f}_3$, 则发生平面局部化。设 $n_2 = 0$, 发生局部化破坏的方向角 θ (θ 为 x_1 轴方向与局部化面法向方向夹角, 见图 1, 下文如不加特殊说明, 局部化角定义同此) 为

$$\tan^2 \theta_{\alpha} = \frac{n_3^2}{n_1^2} = -\frac{\bar{f}_3 + (1-2\Psi)\bar{f}_1 + 2\varphi f_{\nu}}{\bar{f}_1 + (1-2\Psi)\bar{f}_3 + 2\varphi f_{\nu}}. \quad (18)$$

如 $r \leq 0$ 且 $\bar{f}_1 < \bar{f}_2 < \bar{f}_3$, 则局部化方向角为

$$\tan^2 \theta_{\alpha} = -\frac{\bar{f}_1 + (1-2\Psi)\bar{f}_1 + 2\varphi f_{\nu}}{\bar{f}_3 + (1-2\Psi)\bar{f}_3 + 2\varphi f_{\nu}}. \quad (19)$$

表 1 本文使用的符号约定

符号	表达式	名称含义
f_{ν}, g_{ν}	$f_{\nu} = f_{ij}, g_{\nu} = g_{ij}$	f_{ij} 和 g_{ij} 的第一不变量
$\bar{f}_{ij}, \bar{g}_{ij}$	$\bar{f}_{ij} = f_{ij} - \delta_{ij} f_{\nu}/3$ $\bar{g}_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij} g_{\nu}/3$	f_{ij} 和 g_{ij} 的偏量
ζ	$\zeta = (\partial f[w^0, \hat{d}]/\partial w^0)^{-1}$	$g_{\nu} = \zeta f_{\nu}, \bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ij}$
Ψ	$\Psi = 1/[2(1-\nu)]$	ν 为泊松比
φ	$\varphi = (1+\nu)/[6(1-\nu)]$	ν 为泊松比
r	$r = 2\varphi f_{\nu}$	
k	$k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{f}_i^2 + \frac{2}{3} \varphi f_{\nu}^2$	

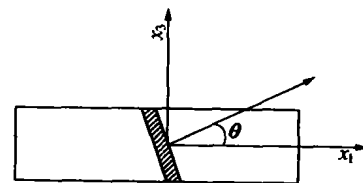


图 1 局部化方向角示意图

Fig. 1 Sketch of localization angle

3 平面问题分析

下面为本文局部化分析在几种简单情况下的结

表2 平面应变单轴拉伸几种标量损伤模型得到的局部化结果

Table 2 Localization results of uniaxial tension under plane strain condition for some scalar damage models

模型	损伤面表达式	最大硬化模量 H^{db}	局部化方向角
Simo and Ju (1987) ^[10]	$F = \sqrt{2w^0} - r[\dot{d}]$	$G(1-d)\sqrt{2w^0} \left[\frac{2}{9}(\Psi-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{\Psi} \right)^2 \right] \epsilon_1^2$	$\theta_{\alpha} = \arctan \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}$
Ju(1989) ^[15]	$F = w^0 - r[\dot{d}]$	$G(1-d) \left[\frac{2}{9}(\Psi-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{\Psi} \right)^2 \right] \epsilon_1^2$	$\theta_{\alpha} = \arctan \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}$
Neilsen and Schreyer (1992) ^[16]	$F = (1-d)^2 w^2 - r[\dot{d}]$	$G(1-d)^3 \sqrt{2w^0} \left[\frac{2}{9}(\Psi-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{\Psi} \right)^2 \right] \epsilon_1^2$	$\theta_{\alpha} = \arctan \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}$

表3 各种受力情况下局部化方向角的表达式

Table 3 Expressions of localization angle under various loading conditions

受力情况	单轴拉伸		单轴压缩		纯剪状态
	平面应力	平面应变	平面应力	平面应变	
局部化方向角	$\beta_{\alpha} = \arctan \sqrt{\nu}$	$\theta_{\alpha} = \arctan \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}$	$\beta_{\alpha} = \arctan \sqrt{\frac{1}{\nu}}$	$\beta_{\alpha} = \arctan \sqrt{\frac{1-\nu}{\nu}}$	$\beta_{\alpha} = 45^{\circ}$

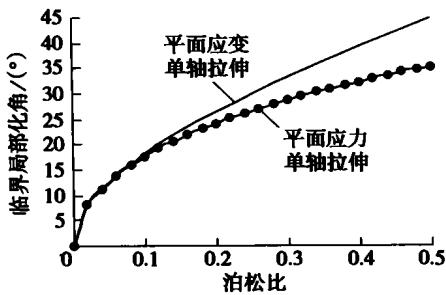


图2 单轴拉伸局部化方向角与泊松比关系曲线

Fig. 2 Localization angle - Poisson's ratio curve for plane uniaxial tension

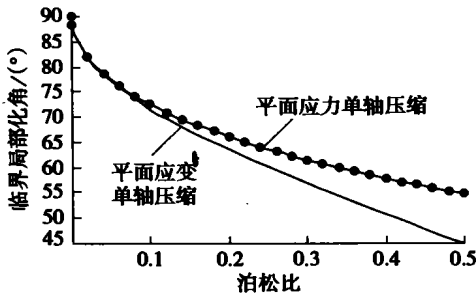


图3 单轴压缩局部化方向角与泊松比关系曲线

Fig. 3 Localization angle - Poisson's ratio curve for plane uniaxial compression

硬化模量产生影响。图2为单轴拉伸两种状态下局部化方向角与泊松比的关系曲线对比。图3为单轴压缩平面应力和平面应变两种情况下的局部化方向角结果对比。在平面应变纯剪状态,局部化方向角为45°,与泊松比无关。文献[16]的数值模拟结果在平面应变纯剪状态下为45°,与本文分析一致。各种情况下局部化方向角表达式见表3。另外,以上结果均已得到试验验证。

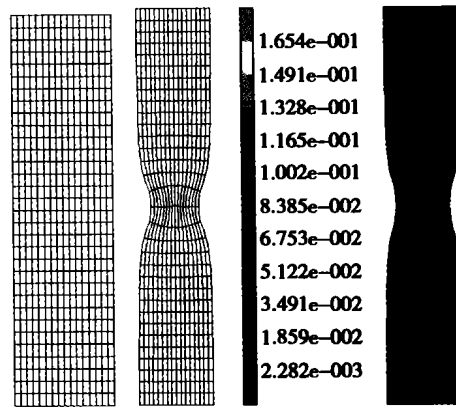


图4 平面应变单轴拉伸应变局部化有限元模拟

Fig. 4 FEM simulation of strain localization under uniaxial tension using the model of this paper

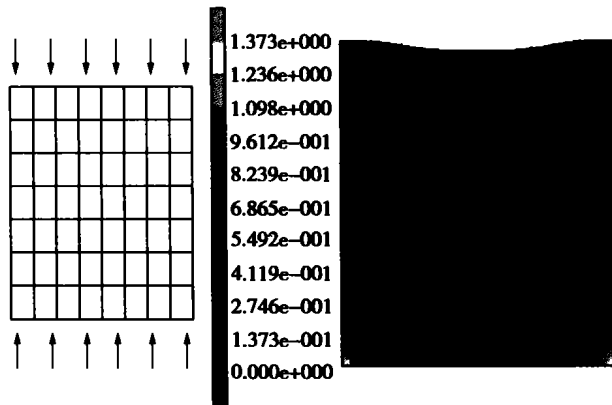


图5 平面应变单轴压缩局部化应变有限元模拟结果

Fig. 5 Simulated result by FEM for uniaxial compression under plane strain condition using the model of this paper

果。我们主要分析了平面应变情况下单轴拉伸的最大硬化模量和局部化方向角。为对比起见,也给出了平面应力单轴拉伸、纯剪状态以及平面应力和平面应变状态单轴压缩情况下的局部化方向角。在平面应变单轴拉伸情况下,利用上面结果我们对文献[10, 15, 16]提出的几种常量损伤模型给出发生局部化时的最大硬化模量和局部化方向角,见表2。由表2可见平面应变单轴拉伸情况下,此3种损伤模型的局部化角均只与泊松比有关。该结果与文献[13]分析表2中情况3的结果一致。另外,文献[17]也给出了与本文一致的数值模拟结果。各种不同的损伤模型差异在于对损伤面函数选择的不同,其结果只会对发生局部化时的最大

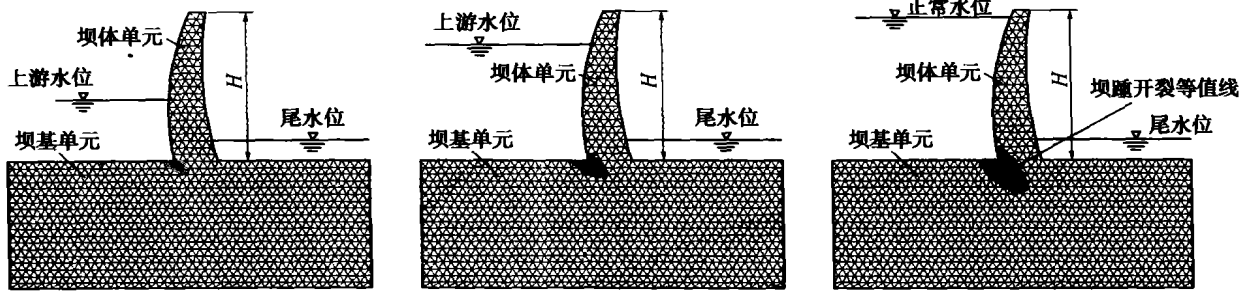


图6 本文损伤局部化模型模拟某拱坝坝踵开裂过程

Fig.6 Simulated damage evaluation at dam heel of Ertan arch dam due to hydraulic fracturing

4 数值模拟验证及工程应用

为验证本文分析结果,我们还进行了数值模拟。图4为使用本文式(1)~(6),(8),(10)的损伤模型使用有限元方法对平面应变单轴拉伸情况的应变局部化破坏所做的模拟。图5为用有限元方法对平面应变单轴拉伸和单轴压缩模拟的结果。两图中材料参数均为: $E = 2 \times 10^5$ MPa,泊松比 $\nu = 0.33$ 。图4左部为初始网格,中部为变形后结构图,右部为变形图和应变分布叠加图。由模拟结果可看出,当颈缩发生时,材料中局部化方向角约为 35° 左右,与本文给出的结果基本接近。图5为使用本文模型对平面应变单轴压缩试件的模拟结果,损伤本构模型使用式(1)~(6),(8),(10)。图5左部为原始网格,右部为发生局部化时的变形和应变分布图,局部化角为 55° 左右,与本文理论分析结果一致。图6为本文局部化模型在某拱坝坝踵开裂模拟过程中的应用。

5 结 论

本文针对岩石混凝土类材料建立了损伤局部化分叉模型,并对其进行了不连续分叉分析,得到了一般的局部化结果。本文还对单轴拉伸、单轴压缩以及纯剪情况下的局部化情况进行了讨论,通过有限元方法和格构模型进行数值模拟对比验证,说明本模型研究具有较为普遍的意义,可以比较合理地描述岩石混凝土类脆性材料的破坏机制和终极形态。本文模型还应用于拱坝坝踵开裂过程模拟。

参考文献:

[1] Hill R, Hutchinson J W. Bifurcation phenomena in the plate tension test[J]. *J Mech Phys Solids*, 1975, 23(4,5): 239 - 264.
 [2] Rudnicki J W, Rice J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. *J Mech Phys Solids*, 1975, 23(6): 371 - 395.
 [3] Ottosen N E, Runesson K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity[J]. *Int J Solids Structures*, 1991, 27(4): 401 - 421.

[4] 赵永红,黄杰藩,王仁. 岩石微破裂发育的扫描电镜即时观测研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 1992, 11(3): 284 - 294.
 [5] 刻公瑞. 岩石混凝土类材料的断裂机理模型研究及其工程应用[D]. 北京:清华大学, 1994.
 [6] 尚嘉兰,孔常静,李延芥,等. 岩石细观损伤破坏的观测研究[J]. *实验力学*, 1999, 14(3): 373 - 383.
 [7] Kachanov L M. Time rupture process under creep conditions (in Russian)[J]. *Izv A Rad Nauk SSSR otd Tekh Nauk*, 1958, 8: 26 - 31.
 [8] Dougill J W. On stable progressively fracturing solids[J]. *J Appl Math Phys*, 1976, 27(6): 423 - 437.
 [9] Bažant Z P, Kim S. Plastic-fracturing theory for concrete[J]. *J Engng Mech Div, ASCE*, 1979, 105(3): 407 - 428.
 [10] Simo J C, Ju J W. Strain- and stress-based continuum damage models - I. Formulation[J]. *Int J Solids Structures*, 1987, 23(7): 821 - 840.
 [11] Carol I, Rizzi E, Willam K. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface[J]. *Int J Solids Structures*, 1994, 31(20): 2835 - 2865.
 [12] Carol I, Rizzi E, Willam K. On the formulation of anisotropic elastic degradation - I theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate[J]. *Int J Solids Structures*, 2001, 38(4): 491 - 518.
 [13] Rizzi E, Carol I, Willam K. Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121(4): 541 - 554.
 [14] Benallal A, Billardon R, Geymonat G. Some mathematical aspects of the damage softening rate problem [A]. Mazars J, Bažant Z P. *Cracking and Damage Strain Localization and Size Effect*[M]. Oxford: Elsevier Science, 1989. 247 - 258.
 [15] Ju J W. On energy-based coupled elasto-plastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects[J]. *Int J Solids Structures*, 1989, 25(7): 803 - 833.
 [16] Neilsen M K, Schreyer H L. Bifurcations in elastic-damaging materials[A]. Ju J W, Valanis K C. *Damage Mechanics and Localization*[C]. New York: ASME, 1992. 109 - 123.
 [17] Brünig M, Berger S, Obrecht H. Numerical simulation of the localization behavior of hydrostatic-stress-sensitive metals[J]. *Int J Mech Sci*, 2000, 42(11): 2147 - 2166.